

R. M. Trigub

## On multiply monotone functions

**Abstract.** In this paper, the algebra of the differences of two multiply monotone functions on  $\mathbb{R}_+ = (0, +\infty)$  is studied. A sufficient condition for the function  $f_0(|x|_{p,d})$ , where  $|x|_{p,d} = \left(\sum_{j=1}^d |x_j|^p\right)^{\frac{1}{p}}$ ,  $p \in (0, +\infty]$ , to be represented as the Fourier transform is given.

2010 *Mathematics Subject Classification.* Primary 26A48; Secondary 42A38, 26A45, 42B35.

**Keywords:** Functions: of bounded variation, convex, multiply monotone, completely monotone and positive definite on  $\mathbb{R}_+$ ; Fourier transform.

Р. М. Тригуб

## О кратно монотонных функциях

**Аннотация.** В статье изучена алгебра разностей двух ограниченных кратно монотонных функций на  $\mathbb{R}_+ = (0, +\infty)$  и указано достаточное условие представимости функции  $f_0(|x|_{p,d})$ , где  $|x|_{p,d} = \left(\sum_{j=1}^d |x_j|^p\right)^{\frac{1}{p}}$ ,  $p \in (0, +\infty]$ , в виде преобразования Фурье.

Список литературы: 17 названий.

**Ключевые слова:** функции ограниченной вариации, выпуклые, кратно монотонные, вполне монотонные и положительно определенные на  $\mathbb{R}_+$ , преобразование Фурье.

### §0 Введение

$m$ -кратно монотонными называют функции  $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ , у которых  $(-1)^\nu f^{(\nu)}$  ( $0 \leq \nu \leq m+1$ ) принимают значения одного знака (каждая из них и все вместе). Например, убывающая функция с возрастающей производной (выпуклая)-1-кратно монотонная, а при  $m = \infty$  – вполне монотонная.

Когда функция  $d$  переменных  $x_1, \dots, x_d$  представима на  $\mathbb{R}^d$  в виде преобразования Фурье, т.е. принадлежит винеровской банаховой алгебре  $\left((x, y) = \sum_{j=1}^d x_j y_j\right)$

$$A(\mathbb{R}^d) = \left\{ f(x) = \widehat{g}(x) = \int_{\mathbb{R}^d} g(y) e^{-i(x,y)} dy, \|f\|_A = \int_{\mathbb{R}^d} |g(y)| dy < \infty \right\} \quad ?$$

Эта алгебра возникает, напр., при изучении мультипликаторов Фурье из  $L_1$  в  $L_1$  (см. [1–2]).

Обзор свойств этой алгебры см. в [3]. В частности, функции из  $A(\mathbb{R}^d)$  принадлежат  $C_0(\mathbb{R}^d)$ , т.е. непрерывны на  $\mathbb{R}^d$  и

$$f(\infty) = \lim_{\max |x_j| \rightarrow \infty} f(x) = 0,$$

а также обладают локальным свойством.

Есть много разных достаточных условий принадлежности  $A(\mathbb{R}^d)$  [3]. Особенно хорошо изучены радиальные функции, т.е. функции вида  $f_0(|x|_{2,d})$ , где  $|x|_{2,d} = \sqrt{(x, x)}$  — евклидова норма. В этом случае вопрос о принадлежности  $A(\mathbb{R}^d)$  при  $d \geq 2$  полностью сводится к принадлежности  $A(\mathbb{R}) = A(\mathbb{R}^1)$  другой функции (см. [4], **6.3.6** и [5]).

Приведем один пример (см. [1], гл. IV, **7.4**):

$$f_0(t) = \frac{e^{it^\alpha}}{(1+t)^\beta}, \quad f_0(|x|_{2,d}) \in A(\mathbb{R}^d) \quad \Leftrightarrow \quad 2\beta > d\alpha \geq 0.$$

Алгебра  $A^*(\mathbb{R})$  (ее свойства см. в [6]) состоит из преобразований Фурье  $f = \hat{g}$ , где  $g \in L_1^*(\mathbb{R})$ , т.е. удовлетворяет условию:  $\operatorname{ess\,sup}_{|y| \geq |x|} |g(y)| \in L_1(\mathbb{R})$ .

Beurling [7] доказал, что если  $f_1(\infty) = 0$  и

$$|f_1(t+h) - f_1(t)| \leq |f_2(t+h) - f_2(t)| \quad (t, h \in \mathbb{R}),$$

где  $f_2 \in A^*(\mathbb{R})$ , то  $f_1 \in A(\mathbb{R})$ .

Отметим еще, что принадлежность  $A(\mathbb{R}^d)$  является существенной при изучении сходимости на  $L_1$  и  $C$  линейных средних рядов и интегралов Фурье, определяемых одной функцией–множителем ([4], **8.1.2**), а принадлежность  $A^*$  является определяющей для сходимости тех же средних во всех точках Лебега (почти всюду). См. [4], **8.1.3**.

В настоящей статье изучена алгебра  $V_m$  функций, равных разности двух ограниченных и  $m$ -кратно монотонных функций на  $\mathbb{R}_+$ , и указано достаточное условие для того чтобы  $f_0(|x|_{p,d}) \in A(\mathbb{R}^d)$ ,  $p \in (0, +\infty]$  (см. следствия и примеры в §3).

Далее по плану:

§1 Кратно монотонные функции.

§2 Алгебра  $V_m(\mathbb{R}_+)$ .

§3 О функциях вида  $f_0(|x|_{p,d})$  ( $d \geq 2, p \in (0, +\infty]$ ).

Через  $\gamma(\dots)$ , возможно с индексами, обозначаем положительные величины, зависящие лишь от переменных, стоящих в скобках.

## §1 Кратно монотонные функции

Известно ([8–9]), что если все функции

$$(-1)^\nu f^{(\nu)} \quad (0 \leq \nu \leq m-1, m \in \mathbb{N})$$

неотрицательны, убывают и выпуклы вниз на  $\mathbb{R}_+ = (0, +\infty)$ , то при  $t \geq 0$  ( $f(0) = f(+0)$ )

$$f(t) = \int_0^{+\infty} (1-tu)_+^m d\mu(u) \quad (a_+ = \max\{a, 0\}),$$

где  $\mu$  — некоторая положительная мера и конечная на  $[0, a]$  при любом  $a > 0$ .

Известно также, что любая выпуклая (вниз, напр.) функция принадлежит  $AC_{loc}(\mathbb{R}_+)$  (на любом отрезке  $[a, b] \subset \mathbb{R}_+$  абсолютно непрерывна и даже из Lip1) и является интегралом от своей (убывающей) правой или левой производной. Выпуклая функция дифференцируема всюду, кроме, возможно, не более счетного числа точек, в которых существуют односторонние производные. Если же выпуклая на  $\mathbb{R}_+$  функция ограничена, то она и монотонная.

**Лемма 1** Если  $f$  ограничена на  $\mathbb{R}_+$  и при  $m \geq 2$   $f^{(m-1)}$  выпукла вверх, то при любом  $\nu \in [0, m]$  и  $t > 0$

$$(-1)^{m+\nu+1} f^{(\nu)}(t) \geq 0$$

и существуют пределы  $f(+0)$  и  $f(+\infty)$ . Кроме того,

$$\lim_{t \rightarrow 0} t^\nu f^{(\nu)}(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} t^\nu f^{(\nu)}(t) = 0 \quad (1 \leq \nu \leq m)$$

$$\text{и } \int_0^\infty t^m |df^{(m-1)}(t)| < \infty.$$

На самом деле, для любой такой ненулевой функции существует  $a \in (0, +\infty]$ , при котором и  $\nu \geq 1$

$$(-1)^{m+\nu+1} f^{(\nu)}(t) > 0 \quad (t \in (0, a))$$

и при  $a < +\infty$  и  $t \geq a$   $f(t) = f(+\infty)$ .

▷ Если функция  $f$  ограничена снизу и при некотором  $m \in \mathbb{N}$   $f^{(m)} \searrow$  (убывает), то  $f^{(m)}(t) \geq 0$  при  $t > 0$ . Действительно, как видно из формулы Тейлора, при любом  $a \in \mathbb{R}_+$  и  $t \geq a$  (интеграл Стильеса)

$$f(t) = \sum_{\nu=0}^m \frac{1}{\nu!} f^{(\nu)}(a)(t-a)^\nu + \frac{1}{m!} \int_a^t (t-a)^m df^{(m)}(u) \leq \sum_{\nu=0}^m \frac{1}{\nu!} f^{(\nu)}(a)(t-a)^\nu.$$

А если бы было  $f^{(m)}(a) < 0$ , то было бы и  $f(+\infty) = -\infty$ . Следовательно, существует предел  $f^{(m)}(+\infty)$  и  $f^{(m-1)} \nearrow$ .

Если  $m \geq 2$ , то по той же причине  $(-f^{(m-1)} \searrow)$   $f^{(m-1)}(t) \leq 0$  на  $\mathbb{R}_+$  и существует предел  $f^{(m-1)}(+\infty)$ . При этом  $f^{(m)}(+\infty) = 0$ , так как в противном случае  $f^{(m-1)}$  не может быть ограниченной около  $+\infty$ .

Продолжая таким же образом, получаем

$$(-1)^{m+\nu+1} f^{(\nu)}(t) \geq 0, \quad f^{(\nu)}(+\infty) = 0 \quad (1 \leq \nu \leq m).$$

В силу монотонности функции и ее производных

$$\int_0^\infty \sup_{u \geq t} |f'(u)| dt = \left| \int_0^\infty |f'(t)| dt \right| = |f(+\infty) - f(+0)|.$$

А если  $g(t) \geq 0$  и  $g \searrow$  на  $\mathbb{R}_+$ , то при  $\alpha \geq 0$

$$0 \leq t^{\alpha+1}g(2t) \leq \int_t^{2t} u^\alpha g(u)du \rightarrow 0 \quad (t \rightarrow +0, t \rightarrow +\infty). \quad (1)$$

Поэтому

$$\lim_{t \rightarrow +0} t f'(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} t f'(t) = 0.$$

Но тогда и

$$\int_0^\infty t \sup_{t \geq u} |f''(u)| dt = \left| \int_0^\infty t f''(t) dt \right| = \left| \int_0^\infty f'(t) dt \right| < \infty.$$

В силу (1)

$$\lim_{t \rightarrow +0} t^2 f''(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} t^2 f''(t) = 0$$

и т.д.

Еще нужно учесть, что если непрерывная и ненулевая  $f^{(\nu)}$  убывает к нулю, напр., то существует  $a_\nu \in (0, +\infty]$ , при котором  $f^{(\nu)}(t) > 0$  на  $(0, a_\nu)$  и  $f^{(\nu)}(t) = 0$  при  $a_\nu < +\infty$  и  $t \geq a_\nu$ .

Очевидно, что  $a_{\nu+1} \leq a_\nu$ . Но и  $a_\nu \leq a_{\nu+1}$ , так как

$$f^{(\nu)}(t) = - \int_t^\infty f^{(\nu+1)}(u) du.$$

◀

Вопрос о кратной монотонности стал существенным при определении положительной определенности, т.е. представлении в виде преобразования Фурье положительной меры.

Так, по признаку Пойя, если четная функция  $f \in C_0[0, +\infty)$  и выпукла вниз на  $\mathbb{R}_+$ , то  $f = \widehat{g}$ , где  $g \in L_1(\mathbb{R})$  и  $g(y) \geq 0$ .

Более того,  $g \in L_1^*(\mathbb{R})$ , т.е.  $f \in A^*(\mathbb{R})$  (см.[4], с. 302).

А признак типа Пойя для радиальных функций ([10], см. также [4], **6.3.7**) теперь можно сформулировать так:

если  $f_0 \in C_0[0, +\infty)$  и при  $m = 1 + \left\lfloor \frac{d}{2} \right\rfloor$  ( $d \in \mathbb{N}$ )  $(-1)^m f_0^{(m-1)}$  выпукла вверх на  $\mathbb{R}_+$ , то

$$f_0(|x|_{2,d}) = \int_{\mathbb{R}^d} g(y) e^{-i(x,y)} dy, \quad g \in L_1(\mathbb{R}^d), \quad g(y) \geq 0 \quad (y \in \mathbb{R}^d). \quad (2)$$

По теореме Бернштейна ограниченная и вполне монотонная функция на  $\mathbb{R}_+$  представима в виде

$$f(t) = \int_0^\infty e^{-ut} d\mu(u) \quad (t \geq 0, f(0) = f(+0)),$$

где  $\mu$  — конечная положительная мера  $[0, +\infty)$ .

А по теореме Schoenberg  $f_0(|x|_{2,d})$  имеет представление (2) при любом  $d \in \mathbb{N}$  в том и только в том случае, когда  $f_0(\sqrt{t})$  вполне монотонная.

Отметим еще, что вместе с  $m$ -кратно монотонной функцией  $f$  и суперпозиция  $f \circ h$  такая же, если  $h(t) \geq 0$ ,  $h(t) \not\equiv 0$  и при  $t \in \mathbb{R}_+$

$$(-1)^{\nu+1} h^{(\nu)}(t) \geq 0 \quad (1 \leq \nu \leq m).$$

Пример:  $h(t) = t^\alpha, \alpha \in (0, 1)$ .

## §2 Алгебра $V_m(\mathbb{R}_+)$

Разность двух кратно монотонных функций может не быть кратно монотонной.

Обозначим через  $V_0(\mathbb{R}_+)$  — множество функций ограниченной вариации на  $\mathbb{R}_+$ , т.е. множество функций, представимых в виде разности двух ограниченных и монотонных функций.

При  $m \in \mathbb{N}$   $V_m(\mathbb{R}_+)$  — это множество функций с условием  $(f^{(m)} \in V_{0,loc})$

$$\|f\|_{V_m} = \sup_{t \in \mathbb{R}_+} |f(t)| + \int_0^\infty t^m |df^{(m)}(t)| < \infty. \quad (3)$$

Это условие при  $m \in \mathbb{R}_+$  W. Trebels [11] использовал как достаточное условие для мультипликаторов Фурье. Это банахова алгебра. См. также [3].

Функции из  $V_1(\mathbb{R}_+)$  называют квазивыпуклыми.

**Лемма 2** Для того чтобы  $f \in V_1(\mathbb{R}_+)$  необходимо и достаточно, чтобы функция была разностью двух ограниченных и выпуклых функций на  $\mathbb{R}_+$ .

▷ Достаточность.

Если  $f = f_1 - f_2$ , где  $f_1$  и  $f_2$  — ограниченные выпуклые, то, используя еще лемму 1, получаем

$$\int_0^\infty t |df_{1,2}(t)| = \left| \int_0^\infty t df_{1,2}(t) \right| = \left| \int_0^\infty f'_{1,2}(t) dt \right| = |f_{1,2}(+0) - f_{1,2}(+\infty)| < \infty.$$

Необходимость.

Полагаем  $f_1(t) = - \int_0^\infty (u-t) |df'(u)|$  ( $f_1(+\infty) = 0$ ).

Очевидно, что при  $t > 0$

$$|f_1(t)| \leq \int_0^\infty u |df'(u)|, \quad f'_1(t) = \int_t^\infty |df'(u)| \searrow$$

и

$$\int_0^\infty t |df'_1(t)| = - \int_0^\infty t df'_1(t) = \int_0^\infty f'_1(t) dt = -f_1(+0).$$

Так что

$$\|f_1\|_{V_1} \leq \int_0^\infty t |df'(t)| + |f_1(+0)| = 2 \int_0^\infty t |df'(t)|.$$

Функция  $f_2 = f_1 - f$  ограничена, как разность ограниченных,

$$f'_2(t) = \int_t^\infty |df'(u)| - f'(t) = \int_t^\infty (|df'(u)| + df'(u)) \searrow$$

и

$$\|f_2\|_{V_1} \leq \|f_1\|_{V_1} + \|f\|_{V_1} \leq 3\|f\|_{V_1}.$$

◀

Отметим, что функции из  $C^2(\mathbb{R}_+)$  образуют плотное множество в  $V_1(\mathbb{R}_+)$ . Для доказательства достаточно применить при  $h \rightarrow +0$  функцию Стеклова

$$f_{2,h}(t) = \frac{1}{h^2} \int_0^h du_1 \int_0^h f(t + u_1 + u_2) du_2.$$

Введем еще промежуточное пространство между  $V_0$  и  $V_1$ . Это множество  $V_0^*(\mathbb{R}_+)$  функций из  $AC_{loc}(\mathbb{R}_+)$  с нормой

$$\|f\|_{V_0^*} = \int_0^\infty \operatorname{ess\,sup}_{u \geq t} |f'(u)| dt.$$

Это банахово пространство не сепарабельное, рефлексивное, в котором непрерывные функции не образуют плотное множество. Эта алгебра (кольцо относительно поточечного умножения) существенно отличается от  $L_1(\mathbb{R}_+)$ .

Отметим лишь одно отличие  $V_0^*$  от  $V_1$ . Любую функцию из  $\operatorname{Lip} 1$  на отрезке  $[a, b] \subset \mathbb{R}_+$  можно продолжить до функции из  $V_0^*(\mathbb{R}_+)$ , но не всегда — до функции из  $V_1$ . По этому поводу см. [14], где еще сравниваются и преобразования Фурье четных функций из  $V_0^*$  и  $V_1$ .

Заметим, что множества  $V_1$  и  $V_0^*$  можно рассматривать и на отрезке вещественной оси. Для отрезка  $[0, b]$ , напр., появляются нормы

$$\int_0^b t \left(1 - \frac{t}{b}\right) |df'(t)|, \quad \int_0^b \operatorname{ess\,sup}_{b \geq u \geq t} (|f'(u)| + |f'(b-u)|) dt.$$

Переходим к общему пространству  $V_m$ ,  $m \in \mathbb{N}$ .

**Теорема 1** *Для того чтобы  $f \in V_m(\mathbb{R}_+)$  (см. (3)), необходимо и достаточно, чтобы ее можно было представить в виде разности двух ограниченных функций с выпуклыми производными порядка  $m-1$ .*

▷ Достаточность.

Если  $f = f_1 - f_2$ , то используя лемму 1, получаем

$$\int_0^\infty t^m |df_{1,2}^{(m)}(t)| = \left| \int_0^\infty t^m df_{1,2}^{(m)}(t) \right| = \left| (-1)^m m! \int_0^\infty f'_{1,2}(t) dt \right| = m! |f_{1,2}(+\infty) - f_{1,2}(+0)| < \infty.$$

Необходимость. Полагаем

$$f_1(t) = \frac{(-1)^m}{m!} \int_t^{+\infty} (u-t)^m |df^{(m)}(u)|.$$

Тогда  $f_1$  ограничена:

$$0 \leq (-1)^m m! f_1(t) \leq \int_0^\infty u^m |df^{(m)}(u)|$$

и

$$f_1^{(m)}(t) = \int_t^\infty |df^{(m)}(u)| \searrow.$$

При этом

$$\|f_1\|_{V_m} \leq \frac{1}{m!} \int_0^\infty u^m |df^{(m)}(u)| + \int_0^\infty t^m |df^{(m)}(t)| \leq \left(1 + \frac{1}{m!}\right) \|f\|_{V_m}.$$

И  $f_2 = f_1 - f$  ограничена, как разность двух ограниченных, а

$$f_2^{(m)}(t) = \int_t^\infty |df^{(m)}(u)| - f^{(m)}(t) = \int_t^\infty |df^{(m)}(u)| + \int_t^\infty df^{(m)}(u) - f^{(m)}(+\infty) \searrow.$$

Предел  $f^{(m)}(+\infty)$  существует, так как при  $x_1 \rightarrow +\infty$  и  $x_2 > x_1$

$$|f^{(m)}(x_2) - f^{(m)}(x_1)| = \left| \int_{x_1}^{x_2} df^{(m)}(t) \right| \leq \int_{x_1}^{+\infty} t^m |df^{(m)}(t)| \rightarrow 0.$$

При этом

$$\|f_2\|_{V_m} \leq \|f_1\|_{V_m} + \|f\|_{V_m} \leq \left(2 + \frac{1}{m!}\right) \|f\|_{V_m}.$$

Trebel [13] (см. также [3], теорема 9.5) доказал, что при  $m > \frac{d-1}{2}$  и  $f_0 \in V_m(\mathbb{R}_+)$  ◀

$$f_0(H(x)) \in A(\mathbb{R}^d)$$

при любой положительной однородной функции  $d$  переменных положительной степени с условием  $H \in C^\infty(\mathbb{R}^d \setminus \{0\})$ .

Теперь эту теорему можно сформулировать так:

*если  $f_0 \in C_0[0, +\infty)$  и ее можно представить в виде разности двух ограниченных функций, у которых производные порядка  $m-1$  при  $m > \frac{d-1}{2}$  выпуклы, то  $f_0 \circ H \in A(\mathbb{R}^d)$ .*



### §3 О функциях вида $f_0(|x|_{p,d})$ ( $d \geq 2, p \in (0, +\infty]$ )

При  $p \in (0, +\infty)$

$$|x|_{p,d} = \left( \sum_{j=1}^d |x_j|^p \right)^{\frac{1}{p}},$$

а при  $p = \infty$   $\|x\|_{\infty,d} = \max_{1 \leq j \leq d} |x_j|$ .

Еще раз об особом случае  $p = 2$ .

**Предложение** Если  $f_0 \in C_0[0, +\infty)$  и  $f_0 \in V_m(\mathbb{R}_+)$  при  $m = 1 + \left\lceil \frac{d}{2} \right\rceil$ , то  $f_0(|x|_{2,d}) \in A(\mathbb{R}^d)$ .

▷ Для доказательства достаточно представить  $f$  в виде разности согласно теореме 1 и применить признак положительной определенности типа Пойя, приведенный в §1. ◀

Когда  $f_0(|x|_{p,d}) \in A(\mathbb{R}^d)$  в зависимости от  $p$ ?

Заметим, что при  $p \neq 2$  не существует частной производной

$$\frac{\partial^r f_0(|x|_{p,d})}{\partial x_1^r} \quad (r > p)$$

в точках, в которых  $x_2 \neq 0$ . Поэтому лучше учитывать поведение смешанных производных (дифференцирование по  $x_j$  ( $j \in [1, d]$ ) не более одного раза).

**Теорема 2** Пусть  $f_0 \in C_0[0, +\infty)$  и  $f_0^{(d-1)} \in AC_{loc}(\mathbb{R}_+)$ . Если еще выполнено условие А или В, то  $f_0(|x|_{p,d}) \in A(\mathbb{R}^d)$  при  $p \in [1, +\infty]$ , а если — условие В, то  $f_0(|x|_{p,d}) \in A(\mathbb{R}^d)$  при  $p \in (0, 1)$ .

$$A. \int_0^\infty t^{d-1} \operatorname{ess\,sup}_{u \geq t} |f_0(u)| dt < \infty,$$

$$B. \int_0^\infty t^{dp-1} \operatorname{ess\,sup}_{u \geq t} u^{d(1-p)} |f_0^{(d)}(u)| dt < \infty,$$

$$B. f_0(t) = 0 \text{ при } t \in [0, a], \text{ а при } t > 0$$

$$f_0(t) = O\left(\frac{1}{t^\varepsilon}\right), \quad f_0^{(\nu)}(t) = O\left(\frac{1}{t^{\varepsilon+\nu\delta}}\right) \quad (\varepsilon > 0, \delta > 1 - \frac{2\varepsilon}{d}).$$

**Следствие 1** Если  $f_0 \in C_0[0, +\infty)$  и  $f_0 \in V_d(\mathbb{R}_+)$ , то при  $p \in [1, +\infty]$

$$f_0(|x|_{p,d}) \in A(\mathbb{R}^d).$$

**Следствие 2** Если  $f_0 \in C_0[0, +\infty)$  и  $f_0 \in V_{d+1}(\mathbb{R}_+)$ , то при  $p \in (0, 1)$

$$f_0(|x|_{p,d}) \in A(\mathbb{R}^d).$$

▷ Приведем доказательство, пропуская в А и В некоторые вычисления.

**Лемма 3** Если симметричная относительно переменных  $x_j$  ( $1 \leq j \leq d$ ) и чётная по  $x_j$  ( $1 \leq j \leq d$ ) функция  $f \in C_0(\mathbb{R}^d)$  имеет на  $\mathbb{R}_+^d$  непрерывную смешанную производную

$$\partial^d f(x) = \frac{\partial^d f(x)}{\partial x_1 \dots \partial x_d},$$

*a*

$$\lim_{x_1 \rightarrow +\infty} \frac{\partial^\nu f(x)}{\partial x_1 \dots \partial x_\nu} = 0 \quad (1 \leq \nu \leq d-1), \quad \int_{\mathbb{R}^d} \sup_{|x_j| \geq |y_j|, 1 \leq j \leq d} |\partial^d f(x)| dy < \infty,$$

то  $f \in A(\mathbb{R}^d)$ .

Доказательство леммы основано на следующей теореме:

если для всех  $x \in \mathbb{R}^d$

$$f(x) = \int_{|x_1|}^{\infty} du_1 \int_{|x_2|}^{\infty} du_2 \dots \int_{|x_d|}^{\infty} g(y_1, \dots, y_d) dy_d$$

*u*

$$\int_{\mathbb{R}^d} \operatorname{ess\,sup}_{|x_j| \geq |y_j|} |g(x)| dy < \infty,$$

то  $f \in A(\mathbb{R}^d)$  ([14], теорема 4, [4], **6.4.10**).

Эта теорема получена в [14] с использованием полученного там же обобщения на кратный случай теоремы Бёрлинга, приведенной во введении.

Считая  $f_0^{(d)} \in C(\mathbb{R}_+)$ , что не уменьшает общности, полагаем

$$g(x) = (-1)^d \partial^d f(x) = (-1)^d \frac{\partial^d f_0(|x|_{p,d})}{\partial x_1 \dots \partial x_d}.$$

Очевидно, что при  $p = \infty$  и  $x \in \mathbb{R}_+^d$   $|\partial^d f_0(|x|_{\infty,d})| = |f_0^{(d)}(|x|_{\infty,d})|$ .

Индукцией по  $d$  легко доказать, что при  $p \in (0, +\infty)$  и  $x \in \mathbb{R}_+^d$

$$\frac{\partial^d f_0(|x|_{p,d})}{\partial x_1 \dots \partial x_d} = \sum_{\nu=1}^d \gamma(d, p, \nu) |x|_{p,d}^{\nu-dp} f_0^{(\nu)}(|x|_{p,d}) \prod_{j=1}^d x_j^{p-1}. \quad (4)$$

**Лемма 4** Пусть  $d \geq 2$  и  $\alpha > 0$ . Тогда при  $p = \infty$

$$\int_{\mathbb{R}^d} g(|x|_{\infty,d}) \prod_{j=1}^d |x_j|^{\alpha-1} dx = \frac{2^d d!}{\alpha(\alpha+1) \dots (\alpha+d-2)} \int_0^\infty t^{2\alpha+d-3} g(t) dt,$$

а при  $p \in (0, +\infty)$  ( $\Gamma$  — гамма-функция Эйлера).

$$\int_{\mathbb{R}^d} g(|x|_{p,d}) \prod_{j=1}^d |x_j|^{\alpha-1} dx = \frac{2^d \Gamma^d\left(\frac{\alpha}{p}\right)}{p^{p-1} \Gamma\left(\frac{d\alpha}{p}\right)} \int_0^\infty t^{d\alpha-1} g(t) dt$$

(в предположении, что простой интеграл справа сходится абсолютно).

При  $p \geq 1$  ( $|x_j| \leq |x|_{p,d}$ ,  $1 \leq j \leq d$ ) и  $\nu \geq 1$  (см. (4))

$$\left| \frac{\partial^\nu f_0(|x|_{p,d})}{\partial x_1 \dots \partial x_\nu} \right| \leq \gamma_0(\nu, p) \max_{1 \leq s \leq \nu} |x|_{p,d}^{s-\nu} \cdot |f_0^{(s)}(|x|_{p,d})|. \quad (5)$$

В. Доказательство основано на теореме 2 (Б) из [15] (формулируем с учетом симметрии функции):

если

$$\frac{\partial^\nu f_0(|x|_{p,d})}{\partial x_1 \dots \partial x_\nu} = O\left(\frac{1}{|x|_{2,d}^{\lambda_\nu}}\right) \quad (0 \leq \nu \leq d), \quad \lambda_0 > 0$$

и

$$\frac{1}{2^d} \sum_{\nu=0}^d \binom{d}{\nu} \lambda_\nu > \frac{d}{2},$$

то  $f \in A(\mathbb{R}^d)$ .

В рассматриваемом случае  $\lambda_0 = \varepsilon$ , а при  $\nu \geq 1$  в силу (5)

$$\lambda_\nu = \nu + \varepsilon + \min_{1 \leq s \leq \nu} \{\delta - 1, s(\delta - 1)\}.$$

Так что при  $\delta \leq 1$   $\lambda_\nu = \varepsilon + \delta\nu$ , а при  $\delta > 1$   $\lambda_\nu = \nu + \varepsilon + \delta - 1$ .

В первом случае ( $\delta \leq 1$ )

$$\frac{1}{2^d} \sum_{\nu=0}^d \lambda_\nu \binom{d}{\nu} = \varepsilon + \delta \frac{1}{2^d} \sum_{\nu=1}^d \nu \binom{d}{\nu} = \varepsilon + \delta \frac{1}{2^d} d \cdot 2^{d-1} > \frac{d}{2}$$

при  $\delta > 1 - \frac{2\varepsilon}{d}$ .

Во втором случае ( $\delta > 1$ )

$$\frac{1}{2^d} \sum_{\nu=0}^d \binom{d}{\nu} \lambda_\nu = \frac{1}{2^d} \sum_{\nu=1}^d \binom{d}{\nu} (\nu + \varepsilon + \delta - 1) + \frac{\varepsilon}{2^d} = (\varepsilon + (\delta - 1)) \frac{2^d - 1}{2^d} + \frac{d}{2} + \frac{\varepsilon}{2^2} > \frac{d}{2}.$$

Теорема 2 доказана. ◀

▷ Доказательство следствия 1. Если  $f_0 \in V_d(\mathbb{R}_+)$ , то в силу теоремы 1 она представима в виде разности  $f_1 - f_2$  двух ограниченных функций с убывающими производными порядка  $d$ . Но тогда (см. еще лемму 1)

$$\int_0^\infty t^{d-1} \sup_{t \geq u} |f_{1,2}^{(d)}(u)| dt = \int_0^\infty t^{d-1} f_{1,2}^{(d)}(t) dt = (-1)^{d-1} (d-1)! (f_{1,2}(+\infty) - f_{1,2}(+0)).$$

И применяем теорему 2. ◀

▷ Доказательство следствия 2. Достаточно убедиться в неравенстве

$$\int_0^\infty t^{dp-1} \sup_{u \geq t} u^{d(1-p)} |f_0^{(d)}(u)| dt \leq \frac{1}{dp} \int_0^\infty t^d |f_0^{(d+1)}(t)| dt.$$

Левая часть не больше

$$\begin{aligned}
& \int_0^\infty t^{dp-1} dt \sup_{u \geq t} u^{d(1-p)} \int_u^\infty |f_0^{(d+1)}(\nu)| d\nu \leq \int_0^\infty t^{dp-1} dt \sup_{u \geq t} \int_u^\infty v^{d(1-p)} |f_0^{(d+1)}(\nu)| d\nu = \\
& = \int_0^\infty t^{dp-1} dt \int_t^\infty u^{d(1-p)} |f_0^{(d+1)}(u)| du = \int_0^\infty u^{d(1-p)} |f_0^{(d+1)}(u)| du \int_0^u t^{dp-1} dt = \\
& = \frac{1}{dp} \int_0^\infty u^d |f_0^{(d+1)}(u)| du.
\end{aligned}$$

Осталось повторить доказательство следствия 1. ◀

### Пример 1

$$f_0(t) = \frac{t^\gamma}{(1+t^\alpha)^\beta}, \quad t = |x|_{p,d}, \quad p \in (0, +\infty]$$

принадлежит  $A(\mathbb{R}^d)$  только при  $\alpha > 0$  и  $\alpha\beta > \gamma \geq 0$ .

▷  $f_0 \in C_0[0, +\infty)$ . Поэтому должно быть  $\alpha > 0$  и  $\alpha\beta > \gamma \geq 0$ .  $f_0 \in C^\infty(\mathbb{R}_+)$ . Любая производная  $f_0$  в достаточно малой окрестности нуля сохраняет знак, т.к. при  $t \in (0, 1)$

$$f_0(t) = t^\gamma - \beta t^{\gamma+\alpha} + \dots$$

Таким же образом ведет себя любая производная и около  $\infty$ , т.к.

$$f_0(t) = t^{\gamma-\alpha\beta} \left( 1 - \beta \frac{1}{t^\alpha} + \dots \right).$$

### Пример 2

$$f_0(t) = \frac{e^{it^\alpha}}{(1+t)^\beta}, \quad t = |x|_{p,d}, \quad p \in (0, +\infty], \quad \alpha \geq 0, \quad \beta > 0.$$

Если  $2\beta > d\alpha$ , то  $f_0(|x|_{p,d}) \in A(\mathbb{R}^d)$  при  $p \in [1, \infty]$ . А если  $\beta > d\alpha$ , то  $f_0(|x|_{p,d}) \in A(\mathbb{R}^d)$  при  $p \in (0, 1)$

▷ При  $p = 2$  этот результат точный (см. пример во введении). Любая производная  $\operatorname{Re} f_0$  и  $\operatorname{Im} f_0$  сохраняет знак в окрестности нуля и можно, как и в примере 1, применить следствия 1 и 2.

А около  $\infty$  применяем при  $p \in [1, \infty]$  случай B в теореме 2, учитывая, что

$$f_0^{(\nu)}(t) = O\left(\frac{1}{t^{\beta+\nu(1-\alpha)}}\right).$$

$\varepsilon = \beta$ ,  $\delta = 1 - \alpha > 1 - \frac{2\beta}{d}$  или  $2\beta > d\alpha$ .

При  $p \in (0, 1)$  применяем Б в теореме 2. ◀

Заметим, что для определения положительной определенности функций есть результаты, которые существенно зависят от  $p \in (0, +\infty]$  (см. напр., [16]).

Отметим еще, что, в отличие от случая  $d = 1$ , при  $d = 2$  средние арифметические квадратных частных сумм двойного ряда Фурье (суммы Марцинкевича) могут сходиться не во всех точках Лебега. Это следует из того, что в  $A^*(\mathbb{R}^2)$  нет, практически, функций вида  $f_0(|x|_{\infty,2})$  или, что то же самое, функций вида  $f_0(|x|_{1,2})$  [17].

## Список литературы

- [1] E. M. Stein *Singular integrals and differentiability properties of functions*. — Princeton Univ. Press. Princeton. — 1970.
- [2] E. M. Stein and G. Weiss *Introduction of Fourier analysis on Euclidean spaces*. — Princeton Univ. Press. Princeton. — 1971.
- [3] E. Liflyand, S. Samko, R. Trigub *Absolute convergence of Fourier integrals*. — Springer, Analysis and Math. Phys. — 2012. — v. 2, №1. — P. 1 – 68.
- [4] R. Trigub and E. Belinsky *Fourier analysis and approximation of functions*. — Kluwer-Springer, Dordrecht. — 2004. — 585 p.
- [5] Р. М. Тригуб *О мультипликаторах Фурье и абсолютной сходимости интегралов Фурье радиальных функций* // Укр.матем.ж. — 2010. — т. 62, № 9. — С. 1280 – 1293.
- [6] E. Belinsky, E. Liflyand and R. Trigub *The Banach algebra  $A^*$  and its properties* // J. Fourier Anal. Appl. — 1997. — v. 3, №2. — P. 103 – 129.
- [7] A. Beurling *On the spectral synthesis of bounded functions* // Acta Math. — 1949. — v. 81. — P. 225 – 238.
- [8] I. J. Schoenberg *On integral representations of completely monotone and related functions: abstract* // Bull. Amer. Math. Soc. — 1941. — v. 47. — P. 208.
- [9] R. E. Williamson *Multiply monotone functions and their Laplace transforms* // Duke Math. J. — 1956. — v. 23. — P. 189 – 207.
- [10] R. Askey *Radial characteristic functions. Tech. Report №1262* // Math. Resc. Center, University of Wisconsin – Madison. — 1973.
- [11] W. Trebels *Multipliers for  $(C, \alpha)$ -bounded Fourier expansions in Banach spaces and Approximation Theory* // Lect. Notes Math., Springer. — 1973. — v. 329.
- [12] Р. М. Тригуб *Преобразование Фурье квазивыпуклых функций и функций класса  $V^*$*  // Укр. матем. вісник. — 2014. — т. 11, №2. — С. 274 – 286 (English transl.: J. Math. Sciences. — 2015. — v. 204, №3).

- [13] W. Trebels *Some Fourier multiplier criteria and the spherical Bochner–Riesz kernel* // Rev. Roumaine Math. Pures Appl. — 1975. — v. 20. — P. 1173 – 1185.
- [14] Р. М. Тригуб *Абсолютная сходимость интегралов Фурье, суммируемость рядов Фурье и приближение полиномами функций на торе* // Изв. АН СССР, сер. мат. — 1980. — т. 44, №6. — С. 1378 – 1409.
- [15] И. Р. Лифлянд, Р. М. Тригуб *О представлении функций в виде абсолютно сходящегося интеграла Фурье* // Труды матем. ин-та им. В. А. Стеклова. — 2010. — т. 269. — С. 153 – 166.
- [16] V. P. Zastavnyi *On positive definiteness of some functions* // J. Multivariate Anal. — 2000. — v. 70. — P. 55 – 81.
- [17] Р. М. Тригуб *О преобразовании Фурье функций двух переменных, зависящих лишь от максимума модуля этих переменных* // arXiv:151203183 v1[math CA]. — 10 Dec. 2015.